1. Билет 27. Смешанная задача для уравнения теплопроводности и колебаний в пространственном случае.

Смешанная задача для уравнения теплопроводности поставлена следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(M,t);\ M \in D, t > 0 \\ u\Big|_{\partial D} = g(P) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(M) \end{cases}$$

Докажем единственность решения этой задачи. Пусть u_1 и u_2 – решения, $v = u_1 - u_2$. Тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v;\ M \in D, t > 0 \\ v\Big|_{\partial D} = 0 \\ v\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Умножим обе части уравнения на v и проинтегрируем по D:

$$\iiint\limits_D v \frac{\partial v}{\partial t} d\tau = a^2 \iiint\limits_D v \Delta v d\tau$$

Вынесем производную по t в левой части, а к правой применим формулу Грина:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_D v^2 d\tau = a^2 \iint\limits_{\partial D} v \frac{\partial v}{\partial n} d\tau - a^2 \iiint\limits_D (gradv)^2 d\tau$$

С учетом граничных условий:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_D v^2 d\tau = -a^2 \iiint\limits_D (gradv)^2 d\tau$$

Положим $N(t) = \frac{1}{2}\iiint_D v^2 d\tau$. Тогда:

$$\begin{cases} N(t) \geq 0 \text{ (из определения)} \\ \dfrac{dN}{dt} \leq 0 \text{ (из равенства)} \\ N(0) = 0 \text{ (из начального условия для } v) \end{cases}$$

Следовательно, $N(t) \equiv 0$ и $v \equiv 0$, ч. и т.д.

Смешанная задача для уравнения колебаний поставлена аналогично:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M,t);\ M \in D, t > 0 \\ u\Big|_{\partial D} = g(P) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(M) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(M) \end{cases}$$

Также докажем единственность решения этой задачи. Как и для ур-я теплопроводности, $v = u_1 - u_2$. Рассмотрим функционал:

$$E(t) = \frac{1}{2}\iiint\limits_D (v_t^2 + a^2(gradv)^2)d\tau$$

$$\frac{dE}{dt} = \iiint\limits_D (v_t v_{tt} + a^2(gradvgradv_t))d\tau$$

Применим формулу Грина ко второму слагаемому в правой части:

$$a^2\iiint\limits_D (gradvgradv_t)d\tau \ = a^2\iint\limits_{\partial D} v_t\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - a^2\iiint\limits_D v_t\Delta v d\tau$$

С учетом второго начального условия первый интеграл в правой части равен нулю. Подставим равенство в исходное выражение:

$$\frac{dE}{dt} = \iiint\limits_D (v_t(v_{tt} - a^2\Delta v))d\tau \ = 0$$

С учетом начальных условий $E(0) = 0$, следовательно $E(t) \equiv 0$. Из этого следует:

$$\begin{cases} v_t \equiv 0 \\ gradv \equiv 0 \end{cases}$$

С учетом граничного условия $v \equiv 0$, ч. и т. д.

2. Уравнение Кортевега-де Фриза и его решение в виде солитона.

Уравнение КдФ имеет вид:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Коэффициенты при членах можно сделать любыми путем несложных замен переменных.

Одно из аналитических решений уравнения КдФ – решение в виде солитона:

$$u(x,t) = \frac{c}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - x_0)\right)} \ \forall c \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}$$

1. Билет 28. Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге. Сведение к уравнению Бесселя.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге $0 \le r \le r_0$. Она имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0;\ 0 < r < r_0 \\ v|_{r=r_0} = 0 \\ v(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \end{cases}$$

Подставим последнее равенство в уравнение. Получим:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)\Phi + R\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \lambda r^2 R\Phi = 0$$

$$\frac{r(rR')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu;\ \mu -\ const$$

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \\ \frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) = 0 \\ R(r_0) = 0 \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$\mu_0 = 0;\ \Phi_0(\varphi) = 1;$$
$$\mu_n = n^2;\ \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} cosn\varphi \\ sinn\varphi \end{cases};$$

Сделаем в 3 уравнении замену $x = \sqrt{\lambda}r$; $\frac{d}{dr} = \frac{d}{dx}\sqrt{\lambda}$; $R(r) = y(\sqrt{\lambda}r) = y(x)$ и сократим на λ:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

Раскроем скобки и домножим на x^2:

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \\ y(\sqrt{\lambda}r_0) = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение называется уравнением Бесселя (точнее, его частным случаем при $n \in \mathbb{N}$).

2. Разрыв потенциала двойного слоя на границе области в трехмерном случае.

Разрыв потенциала двойного слоя на поверхности можно записать следующим образом:

$$W_{int}(P_0) = W(P_0) + 2\pi\nu(P_0)$$
$$W_{ext}(P_0) = W(P_0) - 2\pi\nu(P_0)$$

1. Билет 29. Уравнение Бесселя. Решение уравнения Бесселя в виде степенного ряда. Функции Бесселя и Неймана. Общее решение уравнение Бесселя.

Уравнение Бесселя – это уравнение вида

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0;\ \nu \in \mathbb{R}$$

Найдем его решение в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(x) = x^\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\sigma};\ y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\sigma)x^{k+\sigma-1};\ y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\sigma)(k+\sigma-1)x^{k+\sigma-2}$$

$$x^2y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\sigma)(k+\sigma-1)x^{k+\sigma};\ xy'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+\sigma)x^{k+\sigma}; x^2y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k+\sigma}$$

Подставим в исходное уравнение и получим систему уравнений относительно a_k:

$$a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0;\ a_1((1+\sigma)^2 - \nu^2) = 0;\ a_k((k+\sigma)^2 - \nu^2) + a_{k-2} = 0; k \geq 2$$

Пусть $a_0 \neq 0$, тогда $\sigma = \pm\nu$; $a_1 = 0$;

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}$$

Таким образом, $a_k = 0$ при нечетном k. Пусть $\sigma = \nu; k = 2m$. Тогда:

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2m(m+\nu)}$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}m!\,(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+1)}$$

Положим $a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$. Тогда:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}$$

Аналогично при $\sigma = -\nu$: $a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$;

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m-\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(-\nu+m+1)}$$

Получим:

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} - \text{функция Бесселя 1 рода } \nu \text{ порядка}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}$$

Пусть теперь $\nu = n \in \mathbb{N}$. Так как $\Gamma(-n+1), \Gamma(1-n+1), \dots, \Gamma(n-1-n+1) = \pm\infty$, то:

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(-n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \overset{(j=m-n)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+n} \frac{1}{\Gamma(n+j+1)\Gamma(j+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n} = (-1)^n J_n(x)$$

Поэтому второе линейно независимое решение уравнения Бесселя при $\nu = n$ получается так:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$N_n(x) = \lim_{\nu\to n} N_\nu(x)$$

Функция $N_n(x)$ называется функцией Неймана.

2. Принцип максимума для уравнения Лапласа

Если функция u определена в замкнутой области $D \cup \partial D$, является решением уравнения Лапласа ($\Delta u = 0$) в D и непрерывна в ∂D, то она достигает своих максимального и минимального значений на ∂D.

1. Билет 30. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности в шаре в сферически-симметричном случае с нулевыми краевым условиями первого рода.

Уравнение теплопроводности в шаре:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u; 0 \le r < R; t > 0 \\ u\Big|_{r = R} = 0 \\ u\Big|_{t = 0} = g(M) \end{cases}$$

В сферических координатах оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\varphi} u$$

$$\Delta_r u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(ru) \text{ (второе рав − во вып − ся только в нечетномерных пр − х)}$$

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{du}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

Рассмотрим простейший случай: $u(M,t) = u(r,t);\ g(M) = g(r)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}(ru) \\ u\Big|_{r = R} = 0 \\ u\Big|_{t = 0} = g(r) \end{cases}$$

Заменим $w = ru$:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{rr};\ 0 < r < R \\ w(0,t) = 0 \\ w(r,0) = rg(r) \end{cases}$$

Решение для этой задачи известно:

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n r}{R}, \text{где } c_n = \frac{2}{R}\int_0^R rg(r)\sin\frac{\pi n r}{R} dr$$

Таким образом,

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right) t} \sin\frac{\pi n r}{R}$$

2. Пусть $f(z, z_0)$ – аналитическая функция, осуществляющая конформные отображения односвязной области в единичный круг с переводом точки z_0 в начало координат. Написать выражение для функции Грина задачи Дирихле в этой области.

Функция Грина в исходной области имеет вид:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z, z_0)|}$$